

20.02.2018

Матрично оптимизиране (упражнения)

I. Двойствен CM

$$(K) \min z(x) = c^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$c, x \in \mathbb{R}^n$$

$$b, \pi \in \mathbb{R}^m$$

$$r(A) = m$$

$$(DK) \max v(\pi) = b^T \pi$$

$$A^T \pi \leq c$$

$$\min z(x) = \max v(\pi)$$

$$c_N^T \vec{0} + c_B^T B^{-1} b = b^T \pi \quad | b^{-1}$$

$$c_B^T B^{-1} = \pi^T \quad | A$$

$$(c_B^T B^{-1}) A = \pi^T A \leq c^T | \cdot^T$$

$$A^T B^{-1T} c_B \leq c$$

$$[B^T \ N^T] B^{-1T} c_B \leq [c_B \ c_N]^T$$

$$(B^{-1} N)^T c_B \leq c_N$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$$

Алгоритъм:

x_0	c_0	x_1	...	x_n	$\bar{b}$
x_{i_1}					
$\vdots$					
x_{i_m}					
$\bar{c}$					

1) Ако $\bar{b} \geq 0$ и $\bar{c} \geq 0$, решението е намерено

2) Ако $\exists \bar{b}_k < 0$, тогава ако $\forall w_{kj} \geq 0, j \in N$, то задачата е неограничена

3) Ако $\exists \bar{b}_k < 0$ и $\exists w_{kj} < 0$, избираме $j: \bar{c} = \min \{ \frac{-\bar{c}_j}{w_{kj}} : w_{kj} < 0 \}$ и преминаваме към нов B^{-1}

3a9.1 $\min z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \leq -6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
		1	2	0	0	0	
x_4	0	-1	2	-1	1	0	-4
x_5	0	-2	-1	1	0	1	-6
$\bar{c}$		1	2	0	0	0	0
x_4	0	0	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
$\bar{c}$		0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_3	0	0	$-\frac{9}{2}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$\bar{c}$		0	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

$x^* = (\frac{10}{3}, 0, \frac{2}{3})^T \quad z^* = \frac{10}{3}$

3a9.2 $\max z = -5x_1 - 35x_2 - 20x_3 \quad \min z_k = 5x_1 + 35x_2 + 20x_3$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ -x_1 - 3x_2 \leq -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
		5	35	20	0	0	
x_4	0	1	-1	-1	1	0	-2
x_5	0	$\boxed{-1}$	-3	0	0	1	$\boxed{-3}$
$\bar{C}$		5	35	20	0	0	
x_4	0	0	$\boxed{-4}$	-1	1	1	$\boxed{-5}$
x_1	5	1	3	0	0	-1	3
$\bar{C}$		0	20	20	0	5	
x_2	35	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_1	5	1	0	$\boxed{-\frac{3}{4}}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{3}{4}}$
$\bar{C}$		0	0	15	5	10	
x_2	35	$+\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	1
x_3	20	$-\frac{4}{3}$	0	1	-1	$\frac{1}{3}$	1
$\bar{C}$		20	0	0	20	5	55

$$\bar{C} = \min \left\{ 15 \cdot \frac{4}{3}, 10 \cdot 4 \right\}$$

$$x_K^* = (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^* = (0 \ 1 \ 1)$$

$$z_K^* = 55 \Rightarrow z^* = -55$$

Заг. 3 $\min z = 2x_1 + x_2$ - допустима задача, отговор:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

$$z^* = \frac{12}{5}$$

27.02.2018 II. Следоптимален анализ

Заг. 1 $\max z(x) = 3x_1 + 2x_2$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

Първо решаване задачата със СМ

$$(K) \begin{cases} \min z_k(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_6 = 2 \\ x_{1,2,3,4,5,6} \geq 0 \end{cases}$$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
		-3	-2	0	0	0	0	
x_3	0	1	2	1	0	0	0	6
x_4	0	2	1	0	1	0	0	8
x_5	0	-1	1	0	0	1	0	1
x_6	0	0	1	0	0	0	1	2
Z		-3	-2	0	0	0	0	

(продължение на следващата страница)

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
		-3	-2	0	0	0	0	
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	2
x_1	-3	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
x_5	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
x_6	0	0	1	0	0	0	1	2
$\bar{c}$		0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	
x_2	-2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	-3	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$\bar{c}$		0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{98}{3}$

$$\bar{t} = \min \left\{ \boxed{x_3}, x_1, x_5, x_6 \right\}$$

~~$x_3 = 2, x_1 = 4, x_5 = 5, x_6 = 2$~~

$$x_K^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, 3, \frac{2}{3} \right)^T$$

$$z_K^* = -\frac{38}{3}$$

$$x^* = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3} \right)^T$$

$$z^* = +\frac{98}{3}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$z^* = c_B^T B^{-1}b = c_B^T \bar{b}$$

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1}A_j = c_j - c_B^T w_j, j \in N$$

(a) Промяна в целевата функция

За $j \in N$:

$$c_j' = c_j + \delta$$

$KD(\bar{b} \geq 0)$ - продължава да бъде изпълнен

$KO(\bar{c} \geq 0)$ - чикаме

$$0 \leq \bar{c}_j' = c_j + \delta - c_B^T B^{-1}A_j = \bar{c}_j + \delta, \text{ тоест } \delta \geq -\bar{c}_j$$

За конкретната задача:

$$\delta_3 \geq -\frac{1}{3} \text{ и } \delta_4 \geq -\frac{4}{3}$$

За $j \in B$ и $k \in N$:

$$\begin{aligned}\bar{c}_k' &= c_k - (c_B^T)' B^{-1} A_k = c_k - (c_B^T + \delta e_j^T) B^{-1} A_k = \\ &= \underbrace{c_k - c_B^T B^{-1} A_k}_{\bar{c}_k} - \delta \underbrace{e_j^T B^{-1} A_k}_{w_{jk}} = \bar{c}_k - \delta w_{jk}\end{aligned}$$

За да бъде $\bar{c}_k' \geq 0$,

$$\delta \leq \frac{\bar{c}_k}{w_{jk}} \text{ при } w_{jk} > 0$$

$$\delta \geq \frac{\bar{c}_k}{w_{jk}} \text{ при } w_{jk} < 0$$

За конкретната задача:

$$\begin{aligned}-1 \leq \delta \leq 2 & \text{ (за минимизи)} \\ -2 \leq \delta \leq 1 & \text{ (за максимизи)}\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -1 \leq \delta \leq 2 \\ -2 \leq \delta \leq 1 \end{aligned}} \right\} j=1$$

$$\begin{aligned}-4 \leq \delta \leq \frac{1}{2} & \text{ (за минимизи)} \\ -\frac{1}{2} \leq \delta \leq 4 & \text{ (за максимизи)}\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} -4 \leq \delta \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \delta \leq 4 \end{aligned}} \right\} j=2$$

(б) Трапеза в десната страна

$KD(\bar{b} = B^{-1}b \geq \vec{0})$ е управлен при:

$$0 \leq \bar{b}' = B^{-1}b' = B^{-1}(b + \delta e_i) = \bar{b} + \delta B^{-1}e_i \text{ за } \delta \in \mathbb{R} \text{ и } i \in B$$

За конкретната задача:

Нека $i=5$

$$\bar{b}' = B^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1+\delta \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{8}{3} \\ -2 + \frac{16}{3} \\ -6 + 8 + 1 + \delta \\ -4 + \frac{8}{3} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 + \delta \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \geq \vec{0} \Leftrightarrow \delta \geq -3$$

Нека $i=3$

$$\bar{b}' = B^{-1} \begin{pmatrix} 6+\delta \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(6+\delta)}{3} - \frac{8}{3} \\ -\frac{6+\delta}{3} + \frac{16}{3} \\ -6 - \delta + 9 \\ -\frac{2}{3}(6+\delta) + \frac{14}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4+2\delta}{3} \\ \frac{10-\delta}{3} \\ 3-\delta \\ \frac{2}{3}(1-\delta) \end{pmatrix} \geq \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \delta \geq -2 \\ \delta \leq 10 \\ \delta \leq 3 \\ \delta \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq \delta \leq 1$$

Еквивалентно, $\max_{w_{ki} > 0} -\frac{\bar{b}_k}{v_{ki}} \leq \delta \leq \min_{v_{ki} < 0} -\frac{\bar{b}_k}{v_{ki}}$. Поимотна,

$$\max_{w_{k1} > 0} -\frac{3}{v_{k1}} = -3 \leq \delta \text{ за } i=5$$

~~$$\max_{w_{k1} > 0} -\frac{3}{v_{k1}} = -3 \leq \delta \text{ за } i=5$$~~

$$-2 = \max \left\{ -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \right\} \leq \delta \leq \min \left\{ \left(-\frac{10}{3} \right) / \left(-\frac{1}{3} \right), (-3) / (-1), \left(\frac{2}{3} \right) / \left(-\frac{1}{3} \right) \right\}$$

за $i=3$

(b) Промяна в коефициентите

$$a_{ij}' = a_{ij} + \delta$$

Ако $j \in B$, променя се цялата симплексна таблица и задачата се решава наново

Ако $j \in N$, променят се $\bar{b}$ и $\bar{c}_j$

06.03.2018 III. Задачи, свързани с дискретни програми в условията

Заг. 1 (от предното упражнение)

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
		-3	-2	0	0	0	0	
x_2	-2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	-3	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$\bar{C}$		0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{38}{3}$

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{b} &= B^{-1} b \\ \bar{c}_j &= c_j - C_B^T W_j \\ W_j &= B^{-1} A_j \end{aligned} \right\} (1)$$

$$z^* = C_B^T \bar{b}$$

(a) Промяна в дясната страна

$$b' = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}' = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} - \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{16}{3} \\ -2 + 8 + 1 \\ -\frac{14}{3} + \frac{8}{3} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \vec{0} \Rightarrow x^* = (3, 2)$$

$$z^* = -z_K = 13$$

$$\vec{b}'' = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{\bar{b}}'' = B^{-1} \vec{b}'' = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} - \frac{4}{3} \\ -\frac{7}{3} + \frac{8}{3} \\ -7 + 4 + 1 \\ -\frac{14}{3} + \frac{4}{3} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}$$

Алгоритъм:

1. Решаване задачата с помощта на СМ
2. Намаляне променливи по таблицата с помощта на формулите (1)
3. Ако $\vec{b} \geq \vec{0}$ и $\vec{c} \geq 0$ - Край - базисът се запазва
 - 3.1. $\vec{b} \not\geq \vec{0} \rightarrow 4.$
 - 3.2. $\vec{c} \not\geq \vec{0} \rightarrow 5.$
4. Решаване новата задача с помощта на двойствения СМ
5. Решаване новата задача чрез СМ

Тук запазваме двойствения СМ, x_3 влиза в базиса на мястото на x_5 и падаване:

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
		-3	-2	0	0	0	0	
x_2	-2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
x_1	-3	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_3	0	0	0	1	-1	-1	0	2
x_6	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
z		0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	7

$$x^* = (1, 2)$$

$$z^* = 7$$

(δ) Добавяне на нови ограничения

Ако добавим $|x_1 \leq 4$, $x^* = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$ го удовлетворява и решението се запазва.

Добавяме $|x_1 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_7 = 3 \\ x_7 \geq 0 \end{cases}$

$x_1 - \frac{x_3}{3} + \frac{2}{3}x_4 = \frac{10}{3}$ (второто ограничение)

~~$\frac{10}{3} + \frac{x_3}{3} - \frac{2}{3}x_4 + x_7 = 3$~~ $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_7 = -\frac{1}{3}$

ново ограничение, което можем да добавим към симплексната таблица

Изпразване двойствен СМ, тъй като $\bar{b} \neq \vec{0}$. x_4 заменя x_2 в базиса

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
		-3	-2	0	0	0	0	0	
x_2	-2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	-3	1	0	0	0	0	0	-1	3
x_5	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_4	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
z		0	0	1	0	0	0	2	-12

$x^* = (3, \frac{3}{2})$

$z^* = 12$

(в) Третама във вектора от коефициенти

$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j \geq 0$ Нека $c' = (5, 4)^T \Rightarrow c'_k = (-5, -4, 0, 0, 0, 0)^T$

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
		-5	-4	0	0	0	0	
x_2	-4	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	-5	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$\bar{c}$		0	0	1	2	0	0	

$$\bar{c}_3 = 0 - [(-4)\frac{2}{3} + (-5)(-\frac{1}{3})] = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} = 1$$

$$\bar{c}_4 = 0 - [(-4)(-\frac{1}{3}) + (-5)\frac{2}{3}] = -\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = 2$$

$\bar{c} \geq \vec{0} \Rightarrow x^* = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$ остават опт. решение и $z^* = 22$

Нека $c'' = (4, 1)^T \Rightarrow c''_k = (-4, -1, 0, 0, 0, 0)^T$. $\bar{c}_3 = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow x_3$ заема x_2
 $\bar{c}_4 = \frac{4}{3} \geq 0$

~~Това е оптимално решение, защото всички коефициенти са неотрицателни~~

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
		-4	-1	0	0	0	0	
x_2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
x_1	-4	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
x_5	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
x_6	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	2
$\bar{c}$		0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	

$$\bar{c}_2 = 0 - [(-4)(\frac{3}{2}) + (-1)(\frac{1}{2})] = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

x_4 влиза в базиса, а x_1 излиза

$$\bar{c}_1 = 0 - [(-4)(-\frac{1}{2}) + (-1)\frac{3}{2}] = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
		-4	-1	0	0	0	0	
x_3	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
x_1	-4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
x_5	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
x_6	0	0	1	0	0	0	1	2
$\bar{c}$		0	1	0	2	0	0	-16

$$x^* = (4, 0)^T$$

$$z^* = 16$$

(2) Промяна в отговорите на A

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

Ако променим отговорите на базиса, смятаме задачата на ново

$$w_i = B^{-1} A_i$$

смятаме задачата на ново

В противен случай, използваме двойнитвен СМ.

$$\text{Нека } A_2' = (4 \ 3 \ 1 \ 1)^T$$

и A е ~~то~~ матрицата от коефициенти на последната симплексна таблица

$$\bar{b}' = B^{-1} b - \text{не се променя}$$

$$w_2' = B^{-1} A_2' = \left(\frac{5}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \right)$$

$$\bar{c}_2 = c_2 - c_B^T w_2' = 1 - (-6) = 7 \geq 0 \Rightarrow \text{решението се запазва}$$

13.03.2018

Заг. 1 $\max z = 3x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_7$ (Задача 1 от упр. на 27.02 с :
дообавена променлива x_7)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{3}{4}x_7 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + \frac{3}{4}x_7 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 - x_7 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
		-3	-2	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	
x_2	-2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$
x_1	-3	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	0	-1	1	1	0	-1	3
x_6	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$\bar{c}$		0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	
x_7	$-\frac{3}{2}$	0	4	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	1	$\frac{16}{3}$
x_1	-3	1	-1	-1	1	0	0	0	2
x_5	0	0	4	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{25}{3}$
x_6	0	0	1	0	0	0	1	0	2
$\bar{c}$		0	1	1	1	0	0	0	-14

$$w_7 = B^{-1}A_7 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1 \\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_7 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

$$\bar{c} \geq 0 \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$$z^* = 14$$

Заг. 2 $\max z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 \geq 3 \\ x_1 - x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min z^M = -3x_1 + x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- + Mx_6$$

$$x_3 = x_3^+ - x_3^-$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- = 1$$

$$x_1 - 2x_3^+ + 2x_3^- - x_4 + x_6 = 3$$

$$x_1 - x_3^+ + x_3^- + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0$$

x_B	b	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_B	b	-3	-1	-2	2	0	0	M	
x_2	-1	1	1	3	-3	0	0	0	1
x_6	M	1	0	-2	2	-1	0	1	3
x_5	0	1	0	-1	1	0	1	0	2
$\bar{z}$		(2-M)	0	(1+2M)	(-1-2M)	M	0	0	
x_2	-1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
x_3^-	2	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{z}$		$-\frac{3}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0		
x_2	-1	0	1	0	0	-4	-5		3
x_5	2	0	0	-1	1	-1	-1		1
x_1	-3	1	0	0	0	1	2		1
$\bar{z}$		0	0	0	0	1	3		-4

$$\begin{aligned} z &\geq 0 \\ \Rightarrow x^* &= (1 \ 3 \ -1) \\ z^* &= 4 \end{aligned}$$

(a) Да се намери интервал на устойчивост за C_1

$$C_1^l = C_1 + \delta = 3 + \delta \Rightarrow \bar{C}_4^l = 0 - \langle (-1, 2, -3, -\delta)^T, (-4, -1, 1)^T \rangle = 1 + \delta$$

$$C_5^l = 0 - \langle (-1, 2, -3, -\delta)^T, (-5, -1, 2)^T \rangle = 3 + 2\delta$$

~~и~~

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \geq -1 \\ 2\delta \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \delta \geq -1 \quad \text{и} \quad z^{*'} = 4 + \delta$$

(δ) Да се намери интервал на устойчивост за b_2

$$b_2' = b_2 + \delta = 3 + \delta$$

$$B^{-1}b = \bar{b} \geq \vec{0} \text{ ако } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3+\delta \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4(3+\delta)-10 \\ 3+\delta-2 \\ -3-\delta+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4\delta \\ 1+\delta \\ 1-\delta \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\begin{cases} \delta \geq -\frac{3}{4} \\ \delta \geq -1 \\ \delta \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq \delta \leq 1$$

(δ')

$$b' = (2, 1, 1)^T$$

$$B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 2+4-5 \\ 1-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq \vec{0} \Rightarrow \text{Лажливост се запазва и}$$

$$z^* = 5$$

$$x^* = (1, 1, 0)^T$$

(δ'')

$$b'' = (-1, 1, 2)^T$$

$$\bar{b}'' = (-5, -1, 3)^T \neq \vec{0}. \text{ Използване двойствен (M)}$$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3^r	x_3^F	x_4	x_5	$\bar{b}$
		-3	-1	-2	2	0	0	0
x_2	-1	0	1	0	0	-4	-5	-5
x_3	2	0	0	-1	1	-1	-1	-1
x_1	-3	1	0	0	0	1	2	3
$\bar{C}$		0	0	0	0	1	3	
x_4	0							$5/4$
x_3	2							$1/4$
x_1	-3							$7/4$
$\bar{C}$		0	$1/4$	0	0	0	$7/4$	$-19/4$

$\bar{b} \geq 0$ и $\bar{C} \geq 0 \Rightarrow$
 решението е опт.
 $x^* = \left(\frac{7}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$
 $z^* = \frac{19}{4}$

(b) Добавяне ново неравенство:

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$x^* = (1, 3, -1)$ удовлетворява новото неравенство $\Rightarrow$ реш.
 се запазва

(г) Пренамяне целевата функция

$$\max z' = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \Rightarrow C_B = (1, 2, -3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_4 &= 0 - (-4 - 2 - 3) = 9 \geq 0 \\ \bar{C}_5 &= 0 - (-5 - 2 - 6) = 13 \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{решението се запазва}$$

$$\max z'' = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \Rightarrow C_B = (-2, 2, -3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_4 &= 0 - (8 - 2 - 3) = -3 < 0 \\ \bar{C}_5 &= 0 - (10 - 2 - 6) = -2 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{решението не се запазва.}$$

използваме СМ

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	$\bar{b}$
		-3	-2	-2	2	0	0	
x_2	-2	0	1	0	0	-4	-5	3
x_3^-	2	0	0	-1	1	-1	-1	1
x_1	-3	1	0	0	0	<u>1</u>	2	1
$\bar{C}$		0	0	0	0	-3	-2	
x_2	-2							3
x_3^-	2							2
x_4	0							1
$\bar{C}$		3	0	0	0	0	4	-10

$$\bar{C}_1 = 0 - (-3) = 3$$

$$\bar{C}_5 = -2 - (-3) \cdot 2 = 4$$

$$x''^* = (0, 7, -2)$$

$$z''^* = 10$$

20.03.2018

Компютърно упражнение

Заг. 1

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 & C_1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 & C_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 & M_1 \\ x_2 &\leq 2 & M_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = (3,33 \approx \frac{10}{3}, 1,33 \approx \frac{4}{3}) \quad z^* = (12,66 \approx \frac{38}{3})$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 3; \delta_1^+ = 1; \delta_1^- = 2 \Rightarrow [3-2, 3+1] = [1; 4] \\ C_2 &= 2; \delta_2^+ = 4; \delta_2^- = \frac{1}{2} \Rightarrow [\frac{3}{2}, 6] \end{aligned} \right\} \text{ интервали на устойчивост}$$

$$b_1: [4; 7]$$

$$b_2: [6; 12]$$

$$b_3: [-2; +\infty)$$

$$b_4: [\frac{4}{3}; +\infty)$$

Правило на 100%:

Три параметра само в с или само в b:

$$C_i \rightarrow C_i'$$

$$\Delta_i = \begin{cases} \frac{|C_i - C_i'|}{\delta_i^+}, & \text{ако } C_i < C_i' \\ \frac{|C_i - C_i'|}{\delta_i^-}, & \text{ако } C_i > C_i' \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \Delta_i = \begin{cases} \leq 1 \rightarrow \text{опт. може се запазва} \\ > 1 \rightarrow \text{не се запазва} \end{cases}$$

(a) Ако повишим цената на външната боя (x_2) с 0,9, ще остане ли същото опт. решение? Как ще се измени стойността на целевата ф-я?

(8) Фирмата може да закупи още един тон C_1 на цена 0,4. Ще го направи ли и защо?

(9) Ако C_1 намалее с 1 тон, а C_2 се ~~увеличи~~ увеличи с 2 тона, ще се запази ли базисът?

Реш. на (а)

$C_1' = 3,5 \in [1, 4] \Rightarrow$ базисът и решението се запазват

$$z^* = \frac{43}{3}$$

Реш. на б)

$b_1' = b_1 + 1 = 7 \in [4; 7] \Rightarrow$ опт. базис остава същият

$z^{1*} = 13 = \frac{39}{3} \Rightarrow z^{1*} - z^* = \frac{1}{3} \Rightarrow$ няма смисъл да се купува

Реш. на (в)

$$\left. \begin{array}{l} b_1' = b_1 - 5 = 5 \\ b_2' = b_2 + 2 = 10 \end{array} \right\} \Delta_1 = \frac{1}{2} \quad \Delta_2 = \frac{2}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^m \Delta_i = 1 \Rightarrow \text{базисът се запазва}$$

$$\Delta_3 = \Delta_4 = 0$$

Защ. 2 Произвеждат се 3 вида сладолед.

x_1 - шоколадов

x_2 - ванилов

x_3 - плодов

млечо	$\left\{ \begin{array}{l} 0,45x_1 + 0,5x_2 + 0,4x_3 \leq 200 \\ 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,4x_3 \leq 150 \\ 0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 \leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$
захар	
сметана	

$$Z = 1,2x_1 + 0,3x_2 + 0,95x_3 \text{ (в лв.)}$$

(а) $x^* = ?$ и $z^* = ?$ (б) Шоколадът от мл. слад. остава 1 лв. (в) — — — 0,92 лв.

(г) При един тон от сметана колко да се увеличи мл. Произведението на опт. реш.? 20

(d) фирмата може да закупи 10 ка. захар за 10 лв. ще го направи ли?

(e) захарта е намалена с 10 ед, а сметаната се е увеличила с 10 ед. Запазва ли се базисът?

27.03.2018 IV. Параметрично оптимизиране

$$(K) \begin{cases} \min z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$t \in [0, +\infty)$$

Варианти:

- 1) $c(t)$ - целевата ф-я зависи от t
- 2) $b(t)$ - дясната страна зависи от t
- 3) $A(t)$ - матрицата от коефициенти зависи от t
- 4) комбинация от 1)-3)

B-бази

$$\bar{x}\text{-вектор} \rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$1) \bar{c}_j = c_j - c_B^T w_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$$

$$\bar{c}_j(t) = c_j(t) - c_B^T(t) B^{-1} A_j$$

$$2) \bar{b}(t) = B^{-1} b(t)$$

;

Алгоритъм:

- 1) При $t=0$ решаваме задачата и намираме опт. вектор $\bar{x}$
- 2) За $t>0$ проверяваме КО и КД, които зависят от t
- 3) Намираме t_1 - критична точка, $t_1 > t_0$. Намираме решение за t_1 и повтаряме процедурата

4) Намиране

$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, T]$, T - крайно число или $+\infty$

B_1

B_2

B_n

1) ~~Задача~~ Задача. намери в $\mathbb{R}$

Заг. 1 $\min z(x, t) = (6t - 3)x_1 + (2t - 2)x_2 - (5t + 5)x_3$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Решаване задачата при $t=0$

x_B	C_B	x_1 -3	x_2 -2	x_3 -5	x_4 0	x_5 0	x_6 0	$\bar{b}$
x_4	0	1	2	1	1	0	0	40
x_5	0	3	0	<u>2</u>	0	1	0	60
x_6	0	1	4	0	0	0	1	30
$\bar{C}$		-3	-2	-5	0	0	0	
x_4	0	$-\frac{1}{2}$	<u>2</u>	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	10
x_3	-5	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	0	1	4	0	0	0	1	30
$\bar{C}$		$\frac{9}{2}$	-2	0	0	$\frac{5}{2}$	0	
x_2	-2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	5
x_3	-5	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	0	<u>2</u>	0	0	-2	1	1	10
$\bar{C}$		4	0	0	1	2	0	

$\bar{x} = (0, 5, 30)$ е опт. реш.

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1		$-3+6t$	$-2+2t$	$-5-5t$	0	0	0	
x_2	$-2+2t$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	5
x_3	$-5-5t$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	0	2	0	0	-2	1	1	16
$\bar{c}$		$4+14t$	0	0	$1-t$	$2+3t$	0	$160+140t$

KO е изминено
за $t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow t_1 = 1$$

~~$160+140t$~~

Мека $t > 1$. Тогава x_4 заема x_2

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_1		$-3+6t$	$-2+2t$	$-5-5t$	0	0	0	
x_4	0	$-\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	10
x_3	$-5-5t$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	0	1	4	0	0	0	1	30
$\bar{c}$		$(\frac{9}{2}, \frac{22}{2}t)(-2+2t)$	0	0	$\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t$	6		$150 + 150t$

Всички $\bar{c}_i \geq 0$

$\Rightarrow$ няма повече
решения

t	x	z
$0 \leq t \leq 1$	$(0, 5, 30)$	$-160 - 140t$
$t \geq 1$	$(0, 0, 30)$	$-150 - 150t$

2)

Парам. процени в B

Защ. 2

Запазваме базовата задача от защ. 1, но с $b = (40-t, 60+2t, 30-7t)^T$
и с не зависи от t .

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40-t \\ 60+2t \\ 30-7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-t \\ 30+t \\ 10-3t \end{pmatrix} \geq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 5 \\ t \geq -30 \\ t \leq \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t \in [0, \frac{10}{3}]$$

x_8	c_8	x_1 -3	x_2 -2	x_3 -5	x_4 0	x_5 0	x_6 0	$\bar{b}$
x_2	-2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$5-t$
x_3	-5	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$30+t$
x_6	0	0	0	0	-2	1	1	$10-3t$
$\bar{c}$		4	0	0	1	2	0	$160+4t$
x_2	-2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{2} - \frac{7}{4}t$
x_3	-5	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$30+t$
x_4	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-5 + \frac{3}{2}t$
$\bar{c}$		4	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$165 + \frac{3}{2}t$

$$t \in [0, t_1]$$

$$t_1 = \frac{10}{9}$$

$$\begin{cases} \frac{15}{2} \geq \frac{7}{4}t \Leftrightarrow t \leq \frac{30}{7} \\ -5 \geq -\frac{3}{2}t \Leftrightarrow t \geq \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$t_2 = \frac{30}{7}$$

При $t > \frac{30}{7}$ задачата е неограничена, понеже $w_{1p} \geq 0 \forall p$

t	x^*	z^*
$[0, \frac{10}{9}]$	$(0, 5-t, 30+t)$	$-160-4t$
$[\frac{10}{3}, \frac{30}{7}]$	$(0, \frac{15}{2} - \frac{7}{4}t, 30+t)$	$-165 - \frac{3}{2}t$

3) Парам. промени в A

Заг. 3

В и с не зависят от t , а $A_1 = (1+t, 3-2t, 1+3t)^T$
 първият столб на A

$$W_1 = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t \\ 3-2t \\ 1+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4} + \frac{t}{2} \\ \frac{3}{2} - t \\ -2 - 2t + 3 - 2t + 1 + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + t \\ \frac{3}{2} - t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = -3 - (-2(-\frac{1}{4} + t) - 5(\frac{3}{2} - t) - 0) = -3 - (\frac{1}{2} - 2t - \frac{15}{2} + 5t) = 4 - 3t < 0 \text{ за } t > \frac{4}{3}$$

01.04.2018 (2) Перем. изменение b, c и b, b''

Заг. 1 $\min z = (6t-3)x_1 + (2t-2)x_2 - (5t+5)x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40-t \\ 3x_1 + \quad \quad 2x_3 \leq 60+2t \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 30-7t \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1) Решаване задачи за t_1

2) За $t \geq 0$ проверка

KO $\rightarrow t'$

KD $\rightarrow t''$

3) $t_1 = \min\{t', t''\}$

3.1) Ако $t' = t_1 \Rightarrow \text{ПЦМ за } t_1$

3.2) Ако $t'' = t_1 \Rightarrow \text{ДЦМ за } t_1$

4) Повторяем процесс разложения

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
x_4	0	1	2	1	1	0	0	$40-t$
x_5	0	3	0	2	0	1	0	$60+2t$
x_6	0	1	4	0	0	0	1	$30-7t$
$\bar{C}$		$6t-3$	$2t-2$	$-5t-5$	0	0	0	
x_4	0	$-\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$10-2t$
x_3	$-5t-5$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$30+t$
x_6	0	1	4	0	0	0	1	$30-7t$
$\bar{C}$		$\frac{27t+9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$2t-2$	0	0	$\frac{5t+5}{2}$	0
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0		$5-t$
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0		$30+t$
x_6	2	0	0	-2	1	1		$10-3t$
$\bar{C}$		$14t+4$	0	0	$1-t$	$2+3t$	0	
x_4	$-\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0		$10-2t$
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0		$30+t$
x_6	2	0	0	0	0	1		$30-7t$
$\bar{C}$		$\frac{27t+9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$2t-2$	0	0	$\frac{5t+5}{2}$	0

$t_0 = 0$
 $t_1 = 1$

KD $\begin{cases} 5-t \geq 0 \\ 30+t \geq 0 \\ 10-3t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 5 \\ t \geq -30 \\ t \leq \frac{10}{3} \end{cases}$

KO $\begin{cases} 14t+4 \geq 0 \\ 1-t \geq 0 \\ 2+3t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{2}{7} \\ t \leq 1 \\ t \geq -\frac{2}{3} \end{cases}$

t	x^*	z^*
$[0, 1]$	$(0, 5-t, 30+t)$	$7t^2 + 143t + 160$
$[1, \frac{20}{7}]$	$(0, 0, 30+t)$	$-6t^2 - 180t$

Заг.1
 $\max z = (1+3t)x_1 + 3x_2 + (5-t)x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq t-3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2+3t \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

t	x^*	z^*
$0 \leq t \leq 3$	определ. по м.б.	
$3 \leq t \leq 5$	$(0, 0, 0)$	0
$5 \leq t < +\infty$	$(0, 0, t-3)$	$-t^2 + 8t - 15$

x_B	C_B	x_1 $1+3t$	x_2 3	x_3 $5-t$	x_4 0	x_5 0	$\bar{b}$
x_4	0	2	1	1	1	0	$t-3$
x_5	0	3	1	2	0	1	$2+3t$
$\bar{C}$		$1+3t$	3	$5-t$	0	0	
x_3	$5-t$	2	1	1	1	0	$t-3$
x_5	0	-1	-1	0	-2	1	$t+8$
$\bar{C}$		$5t-9$	$-2+t$	$t-5$	0	0	$(5-t)(t-3) = 5t - t^2 - 15 + 3t = -t^2 + 8t - 15$

Заг.3 $\max z = -3x_1 + 3x_2 - (1+t)x_3$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 \\ -3x_1 + 4x_2 \geq t-5 \\ x_i \geq 0 \text{ для } i=1,2,3 \end{cases}$$

t	x^*	z^*
$0 \leq t \leq 2$	$(1, 0, 0)^T$	-3
$t > 2$	$(t-1, t-2, 0)^T + \lambda(1, 1, 0)^T$	-3

17.09.2018

Заг. 1 $\max z = -3x_1 + 3x_2 + (t-2)x_3$

$3x_1 - 4x_2 \leq 5-t$

$x_1 - x_2 - x_3 \geq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(a) Да се изучава поведението на оптималното решение за $t \geq 0$

(б) С методите на следоптималния анализ при $t=3$ и $x_1 - x_2 \geq 2$ ~~да~~ се изучава изменението на оптималното решение.

Решение: Решаване задачата при $t=0$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
		3	-3	2-t	0	0	M	
x_4	0	3	-4	0	1	0	0	5-t
x_6	M	<u>1</u>	-1	-1	0	-1	1	1
$\bar{C}$		3-M	M-3	2-t+M	0	M	0	
x_4	0	0	<u>-1</u>	3	1	3	-3	2-t
x_1	3	1	-1	-1	0	-1	1	1
$\bar{C}$		0	0	5-t	0	3	M-3	+3
x_2	-3	0	1	-3	-1	-3	3	t-2
x_1	3	1	0	-4	-1	-4	4	t-1
$\bar{C}$		0	0	5-t	0	3	M-3	+3

$x_2^* = (t-1, t-2, 0, 0, 0)$

$d_2 = (1, 1, 0, 1, 0, 0)$

Тогава $x_2^* + td_2$ са оптимални за $2 \leq t \leq 5$.

$x_0^* = (1, 0, 0, 2-t, 0)$ е оптимално.

Нека $\eta \geq 0$ и $d_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогава $x_0^* + \eta d_0$ също са решения.

KO: $\begin{cases} t \geq 0 \\ 5-t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 5$

KD: $\begin{cases} t \geq 0 \\ 2-t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$

$\Rightarrow t_1 = 2$, при $t > t_1$ е нарушен критерият за допустимост.

t	x^*	z^*
$0 \leq t \leq 2$	$(1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$	-3
$0 \leq t \leq 5$	$(t-1, t-2, 0) + t(1, 1, 1)$	-3
$t > 5$	—	$+\infty$

Тип $t > 0$ задават е неограничен

$\eta, M \geq 0$

(S)	x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
			3	-3	-1	0	0	
	x_2	-3	0	1	-3	-1	-3	1
	x_1	3	1	0	-4	-1	-4	2
	$\bar{c}$		0	0	2	0	3	

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 1 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_1 &= 2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \\ x_1 - x_2 &= 1 + x_3 + x_5 \geq 2 \end{aligned}$$

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	$\bar{b}$
		3	-3	-1	0	0	0	M	
	x_2	-3	0	1	-3	-1	-3	0	1
	x_1	3	1	0	-4	-1	-4	0	2
	x_8	M	0	0	1	0	1	-1	1
	$\bar{c}$		0	0	2-M	0	3-M	M	0
	x_2	-3	0	1	0	-1	0	-3	4
	x_1	3	1	0	0	-1	0	-4	6
	x_7	-1	0	0	1	0	1	-1	1
	$\bar{c}$		0	0	0	0	1	2	M-2

$x^* = (6, 4, 1, 0, 0, 0) + 3(1, 1, 0, 1, 0, 0)$ е опт. решение за $z \geq 0$

Заг 2 $\min z = 3x_1 - 3x_2 + (1-3t)x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \leq 4-t \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(a) Да се изследва поведението на оптималното решение за $t \geq 0$.

(б) (методите на следоптималния анализ при $t = \frac{4}{3}$ да се изследва изменението на оптималното решение при добавянето на ограничението $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.

Решение (a)

x_B	C_B	x_1 3	x_2 -3	x_3 $1-3t$	x_4 0	x_5 0	x_6 M	$\bar{b}$
x_4	0	3	-4	0	0	1	0	$4-t$
x_6	M	1	-1	-1	0	-1	1	1
$\bar{C}$		$3-M$	$-3+M$	$1-3t+M$	0	M	0	
x_4	0	0	-1	3	1	3	-3	$1-t$
x_4	3	1	-1	-1	0	-1	1	1
$\bar{C}$		0	0	$4-3t$	0	3	$M-3$	
x_2	-3	0	1	-3	-1	-3	3	$t-1$
x_1	3	1	0	-4	-1	-4	4	t
$\bar{C}$		0	0	$4-3t$	0	3	$M-3$	

$$x_1^* = (1, 0, 0) + \mu(1, 1, 0), \mu \geq 0$$

$$z_1^* = 3$$

$$x_2^* = (t, t-1, 0) + \lambda(1, 1, 0), \lambda \geq 0$$

$$z_2^* = 3$$

За $t > \frac{4}{3}$ задачата е неограничена.

$$\left. \begin{aligned} (б) \quad x_1 &= t + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \\ x_2 &= t-1 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 \end{aligned} \right\} x_1 + x_2 + x_3 = 2t-1 + 8x_3 + 2x_4 + 7x_5$$

$$8x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq \underbrace{2-2t}_{=-\frac{2}{3}}$$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\bar{b}$
		3	-3	-3	0	0	0	
x_2	-3	0	1	-3	-1	-3	0	$1/3$
x_1	3	1	0	-4	-1	-4	0	$4/3$
x_3	0	0	0	8	2	7	1	$-2/3$
Z		0	0	0	0	3	0	

Задатокът е недопустим

24.04.2018

Немного оптимизация

$$\min f(x), x \in X$$

f е с някои важни свойства, като сватова непрекъснатост, диференцируемост, изпъкналост

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m, h_j(x) = 0, j=1, \dots, s\}$$

X може да бъде компактен, затворен и неограничен, изпъкнал.

$$\min f(x).$$

$$\begin{cases} g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, j=1, \dots, s \end{cases}$$

Т-ма 1 (Вайерштраус) Нека X е компактен и f е непрекъснатата. Тогава f достига инфимума си

Сл. 1 Ако X е затворено множество, f е непрекъснатата функция и нека $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| \rightarrow +\infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \rightarrow +\infty$.

(условие за коерцитивност). Тогава f достига минимума си.

Т-ма 2 (Ферма) Нека f е диференцируема в $x^* \in X$.

Ако ~~не е~~, x^* е точка на екстремум за f
 $\nabla f(x^*) = \vec{0}$

Т-ма 3 Нека f е двукратно диф. функция, ~~не е~~ $\forall x$ и $x^* \in X$
 1) $\nabla f(x^*) = \vec{0}$

2) $H_f(x^*)$ е положително дефинитна матрица

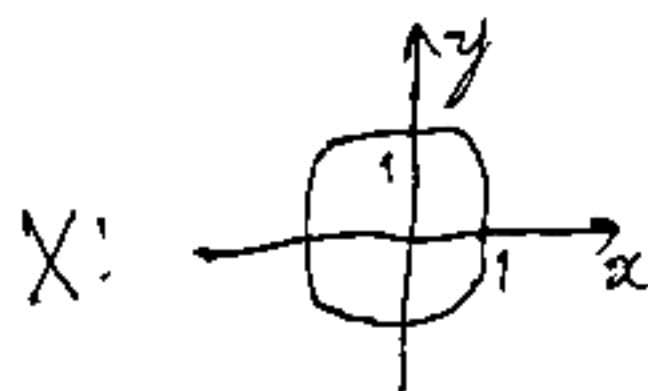
Тогава f достига инфимума си в $x^* \in X$.

Τ-μα (Λαγκρανζ) Νεка x^* е локален мин за $f, f \in \text{diff}$ в x^* и $h_i(x) = 0$ има непрекъснати частни производни в околност на x^* . Тогава $\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$.

$d_{\lambda}(x, \lambda_0, \vec{\lambda}_1) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i h_i(x)$ - ф-ция на Лагранж
 $(\lambda_0, \vec{\lambda}_1) \neq \vec{0}$

Заг. 1 $\min f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} x^6 + y^6 = 1 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Решение

X е компактен ($\partial X = X$) и f е непрекъсната $\Rightarrow$ задамата има решение (от т. на Вайерштрас) и f достига $\min$ си в-ху X . От Т-мата на Лагранж $\Rightarrow \exists \lambda_0, \lambda_1, (\lambda_0, \lambda_1) \neq \vec{0}$, за които

~~$$L(x, y, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0(x^2 + y^2) + \lambda_1(x^6 + y^6 - 1)$$~~

$$d_{\lambda}(x, y, \lambda_0, \lambda_1)$$

$$\nabla d_{\lambda}(x, y, \lambda_0, \lambda_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 x + 6\lambda_1 x^5 = 0 \\ 2\lambda_0 y + 6\lambda_1 y^5 = 0 \end{cases}$$

1 случай $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda_1 x^5 = 0 \\ 6\lambda_1 y^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$

2 κυριαι $\lambda_0 \neq 0$. $\delta 0.0$ $\lambda_0 = 1$

~~XXXXXXXXXX~~

~~XXXXXXXXXX~~

$$\begin{cases} 2x + 6\lambda_1 x^5 = 0/2 \\ 2y + 6\lambda_1 y^5 = 0/2 \end{cases}$$

Εεκα $\lambda_1 \neq 0$ (εκαε πακ $x=y=0$)

$$\begin{cases} x(1 + 3\lambda_1 x^4) = 0 \\ y(1 + 3\lambda_1 y^4) = 0 \end{cases}$$

1) Ανκο $x=0$, το $y = \pm 1, \lambda_1 = -\frac{1}{3}$

2) Ανκο $y=0$, το $x = \pm 1, \lambda_1 = -\frac{1}{3}$

3) Ανκο $x, y \neq 0$
~~XXXXXXXXXX~~, το

$$\begin{cases} 1 + 3\lambda_1 x^4 = 0 \\ 1 + 3\lambda_1 y^4 = 0 \end{cases}$$

~~XXXXXXXXXX~~

$$x^4 = -\frac{1}{3\lambda_1} \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{-\frac{1}{3\lambda_1}} \quad , \lambda_1 < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\pm \sqrt[4]{-\frac{1}{3\lambda_1}} \right)^6 + \left(\mp \sqrt[4]{-\frac{1}{3\lambda_1}} \right)^6 - 1 = 0$$

$$2 \sqrt[6]{\frac{-1}{3\lambda_1}} = 1$$

$$2 = \sqrt[6]{-3\lambda_1}$$

$$\sqrt[6]{-3\lambda_1} = \sqrt[6]{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{2/3} > 0$$

$\Rightarrow$ 1) и 2) са оптимални решения

Заг. 2 $f(x, y) = y \rightarrow \min$

$$X: |x^4 - y^5 = 0$$

Решение

X не е компактен $\Rightarrow$ не можем да използваме т. на Вайерштраас

$$L(x, y, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 y + \lambda_1 (x^4 - y^5)$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 x^3 = 0 \\ \lambda_0 - 5\lambda_1 y^4 = 0 \end{cases}$$

1 случай $\lambda_0 = 0$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 x^3 = 0 \\ 5\lambda_1 y^4 = 0 \end{cases} \quad x = y = 0, \text{ понеже } \vec{\lambda} \neq 0$$

2. $\lambda_0 = 1 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$, поменяем иначе $1=0$ в 2-ом уравнении

$$\begin{cases} \lambda_1 x^3 = 0 \\ 1 - 5\lambda_1 y^4 = 0 \end{cases}$$

$y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{5\lambda_1}}$, $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x = 0$. Но тогда орг. макс. не будет найдено. $\Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$ и $x = y = 0$

~~Задача~~ $\min f(x)$
 $\{g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m\} \quad (*)$

$$I(x^*) := \{i: g_i(x^*) = 0\}$$

Т-ма (Дунк) Пусть x^* — локал. минимум на $(*)$, f диф. в x^* , g_i диф. в x^* для $i \in I(x^*)$, g_i — активно диф. для $i \notin I(x^*)$. Тогда $\exists \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0, (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) \neq 0$, для к-рых $\mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$. Если g_i дифференцируемы для $i \notin I(x^*)$, то тогда

$$\mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^s \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0, i=1, \dots, s$$

Заг. 3 $f(x, y) = x^2 + y^3 \rightarrow \min$

(a) $X = \{(x, y): x^2 + y \leq 1\}$

(б) $X = \{(x, y): x^2 + y \leq 1, -y \leq 1\}$

08.05.2018

Заг. 1 (Заг. 3 от предното упражнение)

$$f(x, y) = x^2 + y^3 \rightarrow \min$$

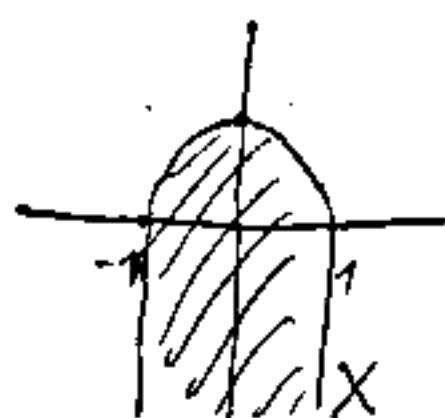
$$(a) X = \{(x, y) : x^2 + y \leq 1\}$$

$$(b) X = \{(x, y) : x^2 + y \leq 1, y \leq 1\}$$

Решение (a) $y = -x^2 + 1$ — парабела

X не е компактен

$$\left. \begin{array}{l} \| (0, y_k) \| \rightarrow +\infty \\ y_k \rightarrow -\infty \\ k \rightarrow \infty \end{array} \right\} \text{Например } y_k = -k$$
$$f(0, y_k) \rightarrow -\infty$$



Следователно задачата е неограничена отдолу.

Прилагаме τ -метода на Лагранж

$$L(x, y, \mu_0, \mu_1) = \mu_0(x^2 + y^3) + \mu_1(x^2 + y - 1)$$

$$L'_x = 2\mu_0 x + 2\mu_1 x = 0$$

$$L'_y = 3\mu_0 y^2 + \mu_1 = 0$$

$$(\mu_0, \mu_1) \neq \vec{0} \text{ и } \mu_0 \geq 0, \mu_1 \geq 0$$

$$\mu_1(x^2 + y - 1) = 0$$

1 сл. $\mu_0 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$ от първото ~~уравнение~~ уравнение. Но $(\mu_0, \mu_1) \neq \vec{0}$

2 сл. $\mu_0 = 1$ (с.о.о.)

$$\begin{cases} 2x(1 + \mu_1) = 0 \\ 3y^2 + \mu_1 = 0 \\ \mu_1(x^2 + y - 1) = 0 \end{cases}$$

ц.2.1 $\mu_1 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$; $(x, y)^T = \vec{0}$ е кандидат за решение

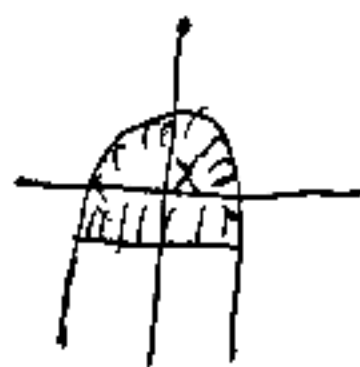
ц.2.2 $\mu_1 \neq 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$; $(0, 1)^T$ ~~не е решение~~

не е решение, понеже $\mu_1 = -1 < 0$.

Така имаме единствен кандидат за решение $(0, 0)^T$.
Но ние знаем, че задачата е неограничена и $\Rightarrow$ кандидатът ~~не е~~ решение.

(б) X е кандидат $\Rightarrow$ задачата има решение



$$L_x = 2\mu_0 x + 2\mu_1 x = 0$$

$$L_y = 3\mu_0 y^2 + \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\mu_1(x^2 + y - 1) = 0$$

$$\mu_2(-y - 1) = 0$$

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$(\mu_0, \mu_1, \mu_2)^T \neq \vec{0}$$

1. $\mu_0 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \Rightarrow \vec{0}$ не е решение

$\mu_1 \neq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$ от третото уравнение
 $y = -1$ от четвъртото уравнение

2. $\mu_0 \neq 0$, с.о.о. $\mu_0 = 1$

$$2x + 2\mu_1 x = 0 \Rightarrow \mu_1 = -1 \Rightarrow \text{противоречие}$$

$$3y^2 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow \\ \end{array} \right.$$

$$\mu_1(x^2 + y - 1) = 0$$

$$\mu_2(y + 1) = 0$$

$y = 1$ от 3 уравн.

$y = -1$ от 4 уравн.

$\Rightarrow$ поне μ_1 или $\mu_2 = 0$.

~~не е решение, понеже $\mu_1 = -1 < 0$ и $\mu_2 = 0$~~

сл. 2.1 $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 \neq 0$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 - \mu_2 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ и } y = -1 \text{ е кандидат за решение}$$

сл. 2.2 $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x + 2\mu_1 x = 0 \\ 3y^2 + \mu_1 = 0 \\ x^2 + y - 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \mu_1 = -3 < 0 - \text{противоречие}$$

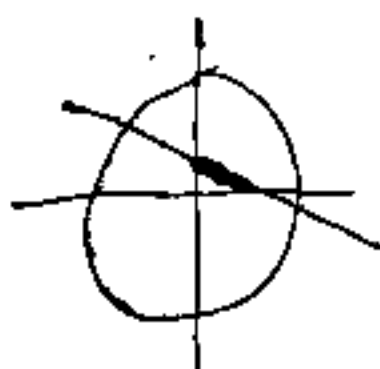
сл. 2.3 $\mu_1 = \mu_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ и } y = 0 \text{ е кандидат за решение}$$

Сред кандидатите $(0, -1)^T$ е оптимално

Заг. 2 $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$

$$X: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



X е компактен $\Rightarrow$ задачата има решение

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \lambda_1) &= \\ &= \mu_0(x_1^2 + x_2^2) + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) \\ &+ \mu_2(-x_1) + \mu_3(-x_2) + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 4) \end{aligned}$$

Т-ма Нека x^* е локален мин. за $f(x)$ в задачата

$$X: \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, j=1, \dots, s \end{cases}$$

и нека $f, g_i, i \in I(x^*)$ са диф. в x^* и $y_i, i \in I(x^*), h_j, j=1, \dots, s$ да са непрекъснати частни производни в околност на x^* .
Тогава $\exists \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ не всички $= 0$:

$$\begin{aligned} \nabla L(x^*, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m, \lambda_1, \dots, \lambda_s) &= \\ &= \mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^s \lambda_j \nabla h_j(x^*) = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\underline{2.3 \text{ α}} \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \\ \mu_3 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1(1+\mu_1) + \lambda_1 = 0 \\ 2x_2(1+\mu_2) + 2\lambda_1 = 0 \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{2.3.1 \text{ α}} \quad \mu_1 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow x_2 + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 5x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{5} \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{καταγράφει} \\ \text{μετακίνηση} \end{array} \right\} \text{καταγράφει για} \\ \text{μετακίνηση}$$

$$\lambda_1 = -\frac{8}{5}$$

$$\underline{2.3.2 \text{ α}} \quad \mu_1 \neq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 - \text{προστιθέμε}$$

$$\text{Εξισώνουμε στα άνω και } (x_1, x_2)^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)^T$$

$$f(x^*) = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$$

$$\underline{\text{ζητ. 3}} \quad \min f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x_i}$$

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = b, x_i \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} a_i &> 0 \quad \forall i=1, \dots, n \\ b &> 0 \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n \end{aligned}$$

15.09.2018

Заг. 1 $\min_{x \in X} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x_i}$
 (заг. 1 от 4-ред. като 4-ред.)

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = b, x_i \geq 0\}$$

$a_i, b, c_i \geq 0 \forall i$

Решение

X е компактно $\Rightarrow$ задаката има решение

$$L(x_i, \mu_0, \mu_i, \lambda) = \mu_0 \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x_i} + \sum_{i=1}^n \mu_i (-x_i) + \lambda (\sum_{i=1}^n a_i x_i - b)$$

$$L'_{x_i} = -\mu_0 \frac{c_i}{x_i^2} - \mu_i + \lambda a_i = 0$$

$$\begin{cases} \mu_0 \geq 0 \\ \mu_i \geq 0 \forall i=1, \dots, n \\ (\mu, \lambda) \neq 0 \end{cases}$$

У.1 $\mu_0 = 0$

$\Rightarrow \lambda a_i = \mu_i \Rightarrow \mu_i x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \forall i$ - противоречие

У.2

$\mu_0 \neq 0 \Rightarrow \text{d.o.o. } \mu_0 = 1$

$$-\frac{c_i}{x_i^2} - \mu_i + \lambda a_i = 0 \Rightarrow x_i \neq 0 \forall i \text{ и } x_i \mu_i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{c_i}{x_i^2} + \lambda a_i = 0 \forall i \Rightarrow c_i = \lambda a_i x_i^2 \forall i=1, \dots, n \text{ и } x_i^2 = \frac{c_i}{\lambda a_i} \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \end{cases}$$

Тъй като $x_i \geq 0$, то $x_i = \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}}$

$$\sum_{i=1}^n a_i \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}} - b = 0 \Rightarrow b = \sum_{i=1}^n a_i \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_i c_i}{\lambda}} = b \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i c_i}}{b}$$

$$\Rightarrow x_i^* = \sqrt{\frac{c_i}{\lambda a_i}} = \frac{\theta}{\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j c_j}} \sqrt{\frac{c_i}{a_i}}$$

$$f(x^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^n \sqrt{a_j c_j}}{\theta} \frac{c_i}{\sqrt{a_i}} \sqrt{a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i c_i}}{\theta} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i c_i} \right) = \frac{1}{\theta} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i c_i} \right)^2$$

Заг. 2 min/max $f(x, y) = x^2 + y^2$

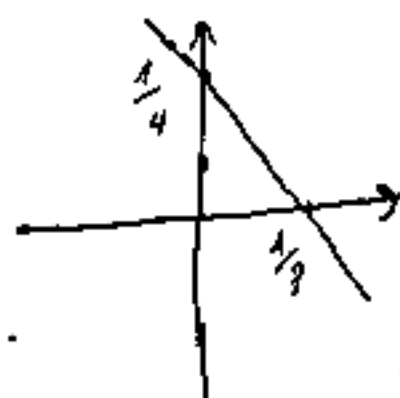
$$| 3x + 4y = 1$$

Решение

f е квадратична $\Rightarrow$ задамата за min
има решение

$$L(x, y, \vec{\lambda}) = \lambda_0(x^2 + y^2) + \lambda_1(3x + 4y) - \frac{1}{\theta}$$

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \vec{\lambda}) = 2\lambda_0 x + 3\lambda_1 = 0 \\ L'_y(x, y, \vec{\lambda}) = 2\lambda_0 y + 4\lambda_1 = 0 \\ L'_{\lambda_0}(x, y, \vec{\lambda}) = x^2 + y^2 = 0 \\ L'_{\lambda_1}(x, y, \vec{\lambda}) = 3x + 4y = 1 \\ \vec{\lambda} \neq \vec{0} \end{cases}$$



$$\begin{matrix} \lambda_0 \\ \swarrow \neq 0 \\ \searrow = 0 \end{matrix}$$

К. 1 $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ - противоречие

К. 2 $\lambda_0 \neq 0$ (д.о.о. $\lambda_0 = 1$) $\Rightarrow \begin{cases} 2x = 3\lambda_1 \\ 2y = 4\lambda_1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 2(y - x)$

$$3x + 8\lambda_1 = 3x + 16y - 16x = 1$$

$$\begin{cases} -13x + 16y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow -25x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{25}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{25} \text{ и } y = \frac{4}{25} \quad \boxed{47}$$

$\Rightarrow (x^*, y^*)^T = (\frac{3}{25}, \frac{4}{25})$ е кандидат за решение.

$f(x^*, y^*) = \frac{1}{25}$ единствен

Задачата за max е неограничена.

Заг. 4 $\min f(x) = \sum_{j=1}^n x_j$

$X: \left| \sum_{j=1}^n x_j = c, x_j \geq 0, j=1, \dots, n, c > 0 \right.$

Решение
Упълнено е условието за коарезистивност $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ задачата има решение

$L(\vec{x}, \lambda, \vec{\mu}) = \cancel{\sum_{j=1}^n \mu_0 x_j} \sum_{j=1}^n \mu_0 x_j + \sum_{j=1}^n \mu_j x_j + \lambda (\sum_{j=1}^n x_j - c)$

$d'_{x_i} = \mu_0 - \mu_i + \lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \quad \forall i=1, \dots, n$

$\cancel{\sum_{j=1}^n x_j} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{\mu_i - \mu_0}{\lambda} \quad \forall i=1, \dots, n$
 $\sum_{j=1}^n x_j = c$
 $\Rightarrow c = \frac{(\mu_i - \mu_0) x_i}{\lambda} \quad \forall i=1, \dots, n$

$\mu_i g_i = \mu_i (-x_i) = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$

Мо $c = \frac{\mu_i x_i - \mu_0 x_i}{\lambda} \Rightarrow c = -\frac{\mu_0 x_i}{\lambda} \quad \forall x_i \geq 0$

$\Rightarrow x_i = x_j \quad \forall i, j$

$$x_i = -\frac{\lambda c}{\mu_0} \quad \forall i=1, \dots, n \Rightarrow \mu_0 > 0 \text{ . d.o.o. } \mu_0 = 1$$

$\Rightarrow x_i = -\lambda c$. Тогава ограничението е извършено при ~~$\lambda = c - \frac{c}{n}$~~
 $\lambda = c - \frac{c}{n}$

Оптималното решение в този случай е $x^* = (c - \frac{c}{n})_{i=1}^n = (\frac{(n-1)c}{n})_{i=1}^n$

$$\text{и } f(x^*) = n(c - \frac{c}{n}) = n^2 \sqrt{c}$$

Заг. 5 $\min f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$X: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \end{cases}$$

Заг. 6 $\min f(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 12x_3$

$$X: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение (заг. 5)

$$L(\vec{x}, \mu_0, \vec{\mu}, \vec{\lambda}) = \mu_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \mu_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) - \mu_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$

$$\begin{cases} 2\mu_0 x_1 + 2\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ 2\mu_0 x_2 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ 2\mu_0 x_3 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \end{cases}$$

У.1 $\mu_0=0 \Rightarrow \mu_1=\mu_2=0$ - противоречие

У.2 $\mu_0=1$ (с.о.о.)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\mu_2 - 2\mu_1}{2} \\ x_2 = x_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \end{cases}$$

~~У.2.1 $\mu_1=0$ и $\mu_2 \neq 0 \Rightarrow x_1=x_2=x_3 = \frac{\mu_2}{2}$~~

У.2.1 $\mu_1=0$ и $\mu_2 \neq 0 \Rightarrow x_1=x_2=x_3 = \frac{\mu_2}{2}$

Второто ограничение е изпълнено при $\frac{3\mu_2}{2} \geq 3 \Leftrightarrow \mu_2 \geq 2$

$$\Rightarrow x_1, x_2, x_3 \geq 1 \Rightarrow f(\vec{x}) \geq 3$$

У.2.2 $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2=0 \Rightarrow x_2=x_3 = \frac{\mu_1}{2}$ и $x_1 = \frac{\mu_1}{2}$

Ограничения са изпълнени при $3 \leq 2\mu_1 \leq 5 \Rightarrow f(\vec{x}) \geq \frac{27}{8}$

У.2.3 $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\mu_2 - 2\mu_1}{2}$ и $x_2=x_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} = x_1 + \frac{\mu_1}{2}$

Първото ограничение е изпълнено при $\mu_2 \leq 5 + 2\mu_1$,
а второто - при

$$\frac{\mu_2 - 2\mu_1}{2} + (\mu_2 - \mu_1) \geq 3 \Leftrightarrow \mu_2 - 2\mu_1 + 2\mu_2 - 2\mu_1 \geq 3 \Leftrightarrow \mu_2 \geq 1 + \frac{4}{3}\mu_1$$

$$x_1 = \frac{(1 + \frac{4}{3}\mu_1) - 2\mu_1}{2} = \frac{3 - 2\mu_1}{6}$$

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + 2(x_1 - \frac{\mu_1}{2})^2 \stackrel{\mu_1 \geq 0}{\geq} \frac{(3 - 2\mu_1)^2 + 2(3 + \mu_1)^2}{36} \stackrel{\mu_1 \geq 0}{\geq} \frac{3^2 + 2 \cdot 3^2}{2 \cdot 3} = \frac{3^3}{2 \cdot 3} = \frac{9}{2}$$

~~У.2.4 $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\mu_2 - 2\mu_1}{2}$ и $x_2=x_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}$~~

Оптимальното решение е $\vec{x} = (1 \ 1 \ 1)^T$

12.05.2018 изпъкнали функции. Изпъкнали мн.ва.

$$X \subseteq \mathbb{R}^n$$

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала ($f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), x_1, x_2 \in X$)

Тв. 1 (Йенсен)

f е изпъкнала $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, f(\sum_{i=1}^K \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^K \lambda_i f(x_i) \forall \{x_i\}_{i=1}^K \subseteq X$

$co(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - изпъкнала обвивка на точките $x_1, x_2, \dots, x_n$

Тв. 2

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ и f е изпъкнала.

$\{x_i\}_{i=1}^K \subseteq X$ и $P = co(x_1, \dots, x_K)$

Тогава $x \in P \Rightarrow f(x) \leq \max_{i=1, \dots, K} f(x_i)$

До-во $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \max_{i=1, \dots, n} f(x_i) = \max_{i=1, \dots, n} f(x_i)$

Тв. 3 X е изпъкнало ^{и отк.}, f е изпъкнала

$x \in \text{int } X$. Тогава X се съдържа в зрещ. кълбо $B[x, d]$, в което f е отк. отгоре

Т-ма 1 Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала. Тогава f е непрекъснат във всяка точка от X .

Т-ма 2 X е изпъкнало, f е изпъкнала $\Rightarrow$

- 1) локалните минимуми на f са и глобални
- 2) множеството от минимуми е изпъкнало
- 3) ако f е строго изпъкнала $\Rightarrow$ минимумът е единствен

Д-во

1) Нека x^* е локален минимум. Тогава $\exists B[x^*, \delta]: f(x^*) \leq f(x), x \in B[x^*, \delta]$

Избираме $y \in X \setminus B[x^*, \delta]$

$$z = \lambda x^* + (1-\lambda)y$$

$$f(z) = f(\lambda x^* + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(y)$$

За $z = x^*$

$$(1-\lambda)f(x^*) \leq (1-\lambda)f(y) \quad / (1-\lambda)$$

$$f(x^*) \leq f(y)$$

2) Нека x_1 и x_2 са лок. минимуми $\Rightarrow$ те са и глобални min

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

~~Противоположно: $f(x_1) < f(x_2)$~~

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(x_1)$$

3) Доп. противното - нека x^* и y^* са лок. мин.

~~Противоположно:~~

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(y^*) = f(y^*)$$

противоположие

□

Т-ма 3 Ако $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ е вып. и диф. в X , тогава следните са еквивалентни

$$1) f(x^*) = \min_x f$$

$$2) \nabla f(x^*) = \vec{0}$$

Свойства на f -изпъкнала в $\mathbb{R}^n$:

- 1) $f(x_2) - f(x_1) \geq \langle f'(x_1), x_2 - x_1 \rangle, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$
- 2) $\varphi(\lambda) = f(x + \lambda y)$ е изпъкнала $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 3) $H(f)$ е положително дефинитна матрица

(*) $\min_{x \in X} f(x)$ - изпъкнала

$$X: \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i \in I_1 - \text{изпъкнали} \\ h_j(x) = 0, j \in I_2 - \text{афинни функции } (h_j(x) = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i - b_j = 0) \\ x_k \geq 0, k \in I \end{cases}$$

Условие на Слейтер: $\exists \bar{x} : g_i(\bar{x}) < 0, i \in I_1$

Функция на Лагранж: $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I_1} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j \in I_2} \lambda_j h_j(x)$

Т-ма (Кун-Такер)

Нека е изпълнено условието на Слейтер за (*). Тогава следните са еквивалентни:

- (1) Точката x^* е решение на (*)
- (2) $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{+m}; (x^*, \lambda^*)$ е седлов за L

Т-ма (Кун-Такер, диференциална форма)

Нека е изпълнено условието на Слейтер за (*). Нека f и g_i са диференцируеми функции в X . Тогава следните са еквивалентни:

- (1) x^* е решение на (*)
- (2) $\exists \lambda_i \geq 0, i \in I_1$ и $\exists \lambda_j, j \in I_2$:
 - (a) $L'_x \geq 0, j \in I$
 - (b) $x_j L'_x = 0, j \in I$
 - (c) $L'_x = 0, i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$
 - (d) $x_k \geq 0, k \in I$
 - (e) $\lambda_k \geq 0, k \in I_1$
 - (f) $L'_{\lambda_k} \leq 0, k \in I_1$
 - (g) $\lambda_k L'_{\lambda_k} = 0, k \in I_1$
 - (h) $L'_{\lambda_\ell} = 0, \ell \in I_2$

Т-ма (Куи-Такер)

Нека е изразено условието на Слейтер, а f и g_i са диф.
 x^* е решение на (*) $\Leftrightarrow \exists \lambda_i \geq 0, i \in I_1(x^*), \lambda_i \in I_2, \mu_k \geq 0, k \in I(x^*)$:

$$\begin{aligned} I_1(x^*) &= \{i \in I_1: g_i(x^*) = 0\} \\ I(x^*) &= \{k \in I: x_k^* = 0\} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} -\nabla f(x^*) &= \sum_{i \in I_1(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{k \in I(x^*)} \mu_k (-e_k) \end{aligned} \right.$$

Заг. 1 $\min f(x) = (x_1 - \frac{9}{4})^2 + (x_2 - 2)^2$

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Решение: $\nabla f = 2(x_1 - \frac{9}{4}, x_2 - 2)^T$

$$H(f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|H(f)| = 4 > 0$ - f е изпъкнала (строго)

$$\nabla g(x) = (2x_1, -1)^T$$

$$H(g)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H(g)| = 0$ - g е изпъкнала (не строго)

$\bar{x} = (0, 6)$ изпъкнава условието на Слейтер

$$L(x, \lambda, \mu) = (x_1 - \frac{9}{4})^2 + (x_2 - 2)^2 + \mu(x_1^2 - x_2) + \lambda(x_1 + x_2 - 6)$$

1) $L'_{x_1} = 2(x_1 - \frac{9}{4}) + 2\mu x_1 + \lambda \geq 0$

2) $x_1 L'_{x_1} = 0$

$$x_1 \geq 0$$

$$4) L'_{x_2} = 2(x_2 - 7) - \mu + \lambda = 0$$

$$5) \text{ ~~5.1)~~ } L'_\mu = x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$6) \mu L'_\mu = \mu(x_1^2 - x_2) = 0$$

$$7) x_1 + x_2 - 6 = 0$$

$$8) \mu \geq 0$$

	x_1	x_2	μ	λ
1. u.	0	6	0	-8
2. u.				

$$1. \text{ u. } \vec{x} = (0, 6)$$

$$5) \Rightarrow x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$6) \Rightarrow \mu = 0$$

$$4) \Rightarrow \lambda = -8$$

$$1) \Rightarrow -\frac{9}{8} - 8 \geq 0 - \text{непротиворечие} \Rightarrow x_1 \neq 0$$

~~5.1) $x_1^2 - x_2 \leq 0$~~

$$2. \text{ u. } x_1 \neq 0$$

29.09.2018

$\min_{x \in X} f(x)$, упр.

$x \in X$, упр. на

$X: \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m=I_1, \\ h_j(x) = 0, j=1, \dots, s=I_2, \\ x_k \geq 0, k \in I \end{cases}$

$I_1 = \{1, \dots, m\}$, $I_2 = \{1, \dots, s\}$, $I = \{1, \dots, n\}$

Теорема

x^* — переменная $\Leftrightarrow \exists \mu_i, \lambda_j, i \in I_1, j \in I_2$: (условия Куна-Таккера)

1) $L'_{x_k} \geq 0, k \in I$

2) $x_k L'_{x_k} = 0, k \in I$

3) $L'_{x_k} = 0, k \in I$

4) $x_k \geq 0, k \in I$

5) $L'_{\mu_i} \leq 0, i \in I_1$

6) $\mu_i L'_{\mu_i} = 0, i \in I_1$

7) $\mu_i \geq 0, i \in I_1$

8) $L'_{\lambda_j} = 0, j \in I_2$

Теорема x^* — переменная $\Leftrightarrow \exists \mu_i, \lambda_j, \nu_k: \mu_i \geq 0, \nu_k \geq 0$:

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i \in I_1(x^*)} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j \in I_2} \lambda_j \nabla h_j(x^*) + \sum_{k \in I(x^*)} \nu_k e_k$$

Пример 1 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2 + 3 \rightarrow \min$

$$X: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 3 \\ x_1 - x_2^2 \geq -1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Да се провери, являются ли $x^* = (1, 1)$ и $x^* = (0, 1)$ переменными

Решение:

$$(b) x'' = (0, 1) \in X$$

$$H(f)(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2E \Rightarrow f \text{ е изпукната}$$

$$g_2(x) = -x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0$$

$$H(g_2)(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow g_2 \text{ е изпукло изпукната}$$

g_1 и g_2 очевидно са изпукнати
 $\Rightarrow$ прилагаме втората теорема

$$-\nabla f = -\begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 8 \end{bmatrix} = \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$-\nabla f(x'') = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{\mu} \geq \vec{0} \Rightarrow x'' \text{ не е оптимально решение}$$

$$(a) x' = (1, \sqrt{2}) \in X$$

g_1 и g_2 са активни

$$-\begin{bmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 8 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} - 8 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$2\mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 2\mu_1$$

$$8 - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\mu_1 + 2\sqrt{2}\mu_1$$

$$4 - \sqrt{2} = \sqrt{2}\mu_1 + 2\sqrt{2}\mu_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow \mu_2 > 0 \Rightarrow x' \text{ е оптимально решение}$$

$$\text{Заг. 2 } \min f(x) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 0 \\ x_1^2 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

~~Решение~~ Решение

$$X = \{(0, 0)\}$$

Ключето на Слейтер не е изпъкнало

Няма решение, но зад. има решение

$$-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ex 1

$$\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 10 \\ -2x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Λύση

$$H(f)(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2E \Rightarrow f \text{ ε κυρτή συναρτηση}$$

$$H(g)(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow g \text{ ε κυρτή συναρτηση}$$

$\bar{x}(-\frac{5}{2}, 0)$ ε τοπικά και Γενικά

$\Rightarrow$ εφαρμόζουμε Τ-μιατα και Κυρ-Τακτορ

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \mu, \lambda) &= f(x_1, x_2) + \mu g(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2) = \\ &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 + \mu(x_1^2 + x_2^2 - 10) + \lambda(-2x_1 + x_2 - 5) \end{aligned}$$

$$1) L'_{x_1} = 2(x_1 - 3) + 2\mu x_1 - 2\lambda = 0$$

$$2) L'_{x_2} = 2(x_2 - 5) + 2\mu x_2 - \lambda = 0$$

$$3) L'_\mu = x_1^2 + x_2^2 - 10 \leq 0$$

$$4) \mu L'_\mu = 0$$

$$5) \mu \geq 0$$

$$6) -2x_1 + x_2 - 5 = 0$$

~~α~~

1 αλμ $\mu = 0$

~~αλμ~~

Ατ (6) $\Rightarrow x_2 = 2x_1 + 5$

Αλ $\Rightarrow 2(2x_1 + 5 - 5) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -4x_1$

~~αλμ~~ Ατ (1) $\Rightarrow 2(x_1 - 3) - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = x_1 - 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{5} \\ x_2 = \frac{14}{5} \end{cases} \text{ (στ 6)}$$

(5) με ε
αλμ.
54

2 α. $\mu \neq 0$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 10 \text{ (or 3)}$$

$$\text{or } 6 \Rightarrow x_2 = 2x_1 + 5$$

$$\text{or } (3) \quad x_1^2 + (2x_1 + 5)^2 = x_1^2 + 4x_1^2 + 20x_1 + 25 = 5x_1^2 + 20x_1 + 25 = 0$$
$$x_1^2 + 4x_1 + 5 = 0$$

$$x_1 \in \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm 1 = \{-1, -3\}$$

α. 2.1 $x_1 = -1$

$$\Rightarrow x_2 = 3 \text{ (or 6)}$$

$$\text{or } B \text{ (1) means } L'_{x_1} = 2(-1 - 1) + 2\mu(-1) - 2\lambda = -4 - 2\mu - 2\lambda = 0$$
$$4 + \mu + \lambda = 0$$

$$B \text{ (2) means } L'_{x_2} = 2(3 - 5) + 2\mu \cdot 3 + \lambda = -4 + 6\mu + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu - 4 \\ \lambda = -6\mu + 4 \end{cases} \quad 5\mu = 8 \Rightarrow \mu = \frac{8}{5}$$

$\Rightarrow (-1, 3)$ is a solution

3rd 4 $\min f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$

$$X: \begin{cases} (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution $(2, 0)$ is a point on the circle

$$\begin{aligned} H(f)(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f \text{ is convex} \\ H(g)(x) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow g \text{ is convex} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} H(f)(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow f \text{ is convex} \\ H(g)(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow g \text{ is convex} \end{aligned}} \right\} \text{using the T-lemma on } K_f \text{ and } T_{g,x}$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2\mu x_1 x_2 = 0$$

(8) 2 ηε ε θεωρείται μ_2 (από $x' = 0$)

$$2x_1 + 2\mu x_1 x_2 = 0$$

$$2x_1(1 + \mu x_2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$4x_1 = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 \leq 0$$

$$4\mu x_1 x_2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

09.06.2018

Заг. 1 $\min f(x, y) = e^{-(x+y)}$

$$X: \begin{cases} e^x + e^y \leq 20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Решение

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{-(x+y)} & e^{-(x+y)} \\ e^{-(x+y)} & e^{-(x+y)} \end{bmatrix}$$

$$e^{-(x+y)} \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \det H_f = 0$$

$$H_g(x, y) = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{bmatrix}$$

$$e^x \geq 0 \quad \text{и} \quad \det H_g = e^{x+y} \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ и } g \text{ выпуклы}$$

$(1, 1)$ е т. на центр $\Rightarrow$ можем да приложим т-мост на

Куи-Такер

$$L(x, y, \lambda) = e^{-(x+y)} + \lambda_1 (e^x + e^y - 20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e^{-(x+y)} + \lambda_1 e^x \geq 0$$

$$x \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$x \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -e^{-(x+y)} + \lambda_1 e^y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = e^x + e^y \leq 20$$

$$(1) \quad \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \quad (6)$$

$$(2) \quad \lambda_1 \geq 0 \quad (7)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

$$(5)$$

~~Функционал~~

Нека $\lambda_1 = 0 \Rightarrow e^{-(x+y)} = 0$, което не е изпълнено за нито една двойка точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Значи $\lambda_1 > 0 \Rightarrow e^x + e^y = 20 \Rightarrow e^x = 20 - e^y \Rightarrow x = \ln(20 - e^y)$

Проверка на условията:

$$e^{-(x+y)} + \lambda_1 e^x = -e^{-(\ln(20 - e^y) + y)} + \lambda_1 e^{\ln(20 - e^y)} =$$

$$= (20 - e^y)(-e^{-y}) + \lambda_1 (20 - e^y) =$$

$$= -20e^{-y} - 1 + 20\lambda_1 - e^y \geq 0 \quad | \cdot e^y$$

$$-(e^y)^2 + (20\lambda_1 - 1)e^y - 20 \geq 0 \quad | (-1)$$

$$(e^y)^2 - (20\lambda_1 - 1)e^y + 20 \leq 0$$

$$e^y = \frac{20\lambda_1 - 1 \pm \sqrt{(20\lambda_1 - 1)^2 - 80}}{2}$$

Ул.1 Нека $x = -y$

$$\left. \begin{aligned} e^0 - e^0 + \lambda_1 e^x &\geq 0 \\ e^x &\geq \frac{1}{\lambda_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(e^x - \frac{1}{\lambda_1}) = 0$$

Анализ от (4)

$$e^y = \frac{1}{\lambda_1} \quad | \ln$$

$$y = -\ln \lambda_1 \Rightarrow x = \ln \lambda_1$$

Ул.1.2
 $\lambda_1 \neq 0$

$$\lambda_1 + \lambda_1^{-1} - 20 = 0 \quad | \lambda_1$$

$$\lambda_1^2 - 20\lambda_1 + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4}}{2}$$

$$\text{От (6)} \lambda_1 (e^{\ln \lambda_1} + e^{-\ln \lambda_1} - 20) = 0$$

Ул.1.1 $\lambda_1 = 0 \Rightarrow x = y = 0$ и $(0, 0)$ е кандидат за решение